Propunător: Ildegez Mihaela-Corina
Colegiul Național de Informatică *Spiru Haret* Suceava

Lecția 2: Lanț. Circuit. Tipuri de grafuri

Lanț – este o succesiune de noduri dintr-un graf neorientate cu proprietatea că între oricare două noduri consecutive din lanț există muchie în graf.

Lungimea unui lanț – este formată din numărul de muchii din care este format lanțul.

Lanț elementar – este un lanț care are **noduri distincte**

Lanț simplu – este un lanț alcătuit din **muchii distincte**.

Lanț compus – este un lanț în care muchiile nu sunt distincte.

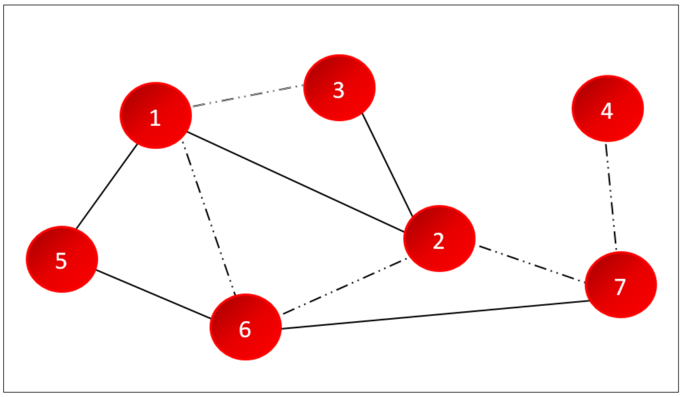
Exemplu 1:

Fie următorul graf neorientat cu **n=7** noduri și **m=10** muchii.

Exemplu de lanț: **3, 1, 6, 2, 7, 4**

Lungimea lanțului: **5 muchii**

Acest lanț este **elementar**, deoarece conține noduri distincte



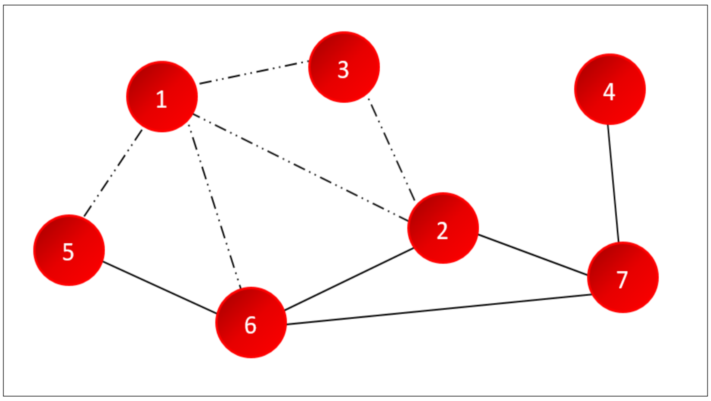
Exemplu 2:

Lanț simplu: **5, 1, 3, 2, 1, 6**

Se observă ușor că se repetă nodul **1**, dar muchiile sunt distincte.

Acest lanț nu este elementar.

Lungimea acestui lanț este **5** si este format din muchiile **(5,1), (1,3), (3,2), (2,1), (1,6)**.



Ciclu - este un lanț simplu în care primul nod coincide cu ultimul nod.

Ciclu elementar – este un ciclu în care nodurile sunt distincte.

Lungimea unui ciclu – este egală cu numărul de muchii din care este alcătuit ciclul. Lungimea minimă a unui ciclu este 3.

Graf aciclic – este un graf care nu are nici un ciclu.

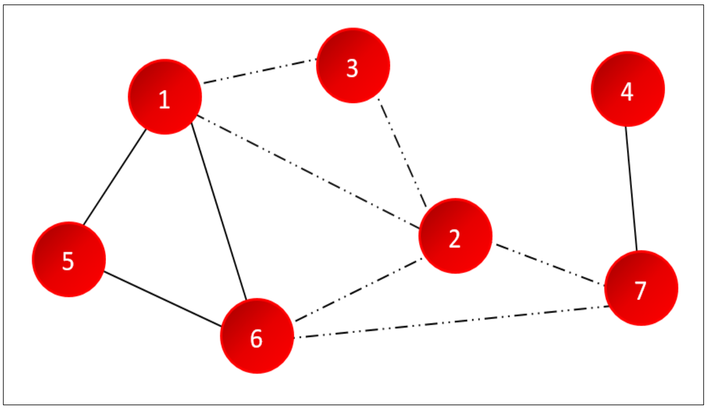
Ciclu hamiltonian – este un **ciclu elementar** care conține **toate nodurile unui graf**. Un graf care admite un ciclu hamiltonian se numește **graf hamiltonian**.

Ciclu eulerian – este un **ciclu** care conține **toate muchiile unui graf**. Un graf care conține un circuit eulerian se numește **graf eulerian**.

Exemplu 3:

Fie următorul graf neorientat cu n=7 noduri și 10 muchii avem următoarele cicluri elementare:

- 1 2 7 6 2 3 1 de lungime 6
- 1 6 5 1 de lungime 3
- 2 6 7 2 de lungime 3
- 1 3 2 6 5 1 de lungime 5
- 1 3 2 7 6 1 de lungime 5
- 5 1 3 2 7 6 5 de lungime 6

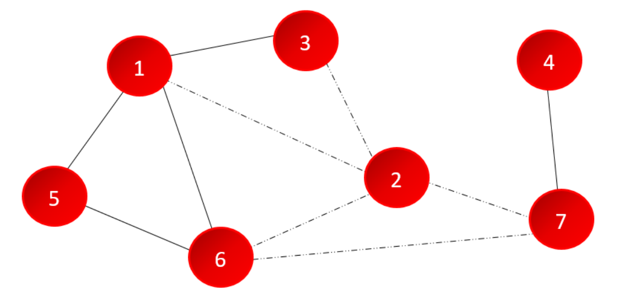


Tipuri de grafuri

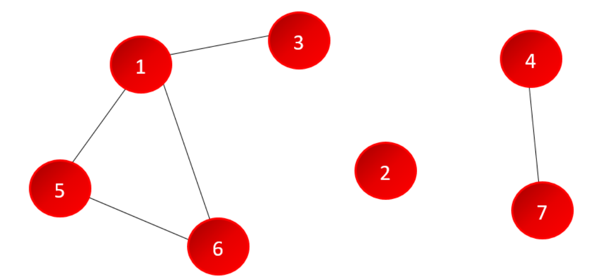
Graf nul – un graf care are **n** noduri, dar nu are nici o muchie. Într-un graf nul toate nodurile au gradul 0, deci toate nodurile grafului sunt izolate.

Graf parțial - al unui graf neorientat G este un graf care aceleași noduri ca și graful G, dar muchiile grafului parțial sunt o submulțime a mulțimii muchiilor grafului G. Graful parțial se obține **eliminând o parte din muchiile grafului inițial** (se pot elimina toate muchiile, o parte dintre muchii sau chiar nici o muchie).

Graful G are
n = 7 noduri și m = 10 muchii



Graf parțial grafului G
n = 7 noduri și m = 5 muchii



Au fost eliminate muchiile (1,2), (2,3), (2,6), (2,7) și (6,7)

Numărul de grafuri parțiale pe care le admite un graf neorientat G cu m muchii se poate determina astfel:

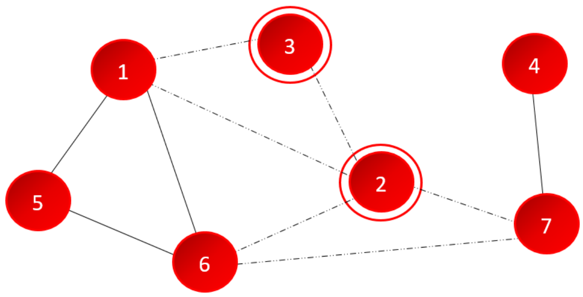
- inițial nu eliminăm nici o muchie deci numărul de grafuri parțiale va fi C_m^0
- eliminăm pe rând câte o singură muchie, deci numărul de grafuri parțiale va fi C_m^1
- eliminăm pe rând câte 2 muchii distincte, numărul de grafuri parțiale va fi C_m^2
- ....
- eliminăm toate cele m muchii, numărul de grafuri parțiale va fi C_m^m

Deci în total vom obține:

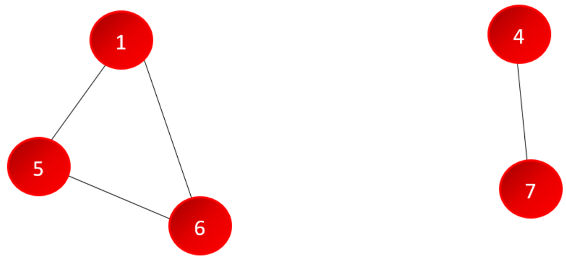
Nrp = $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m = 2^m$ grafuri parțiale

Subgraf – al unui graf G se obține din graful inițial G din care putem șterge unul sau mai multe noduri. Odată cu ștergerea nodurilor se vor șterge si toate nodurile incidente cu acestea. Atenție nu se pot șterge toate nodurile unui graf, deoarece nu poate exista graf cu zero noduri(deci numărul maxim de noduri care se pot șterge este n-1).

Graful G are
n = 7 noduri și m = 10 muchii



Subgraf al grafului G
n = 5 noduri și m = 4 muchii



Am șters nodurile **2** și **3** și odată cu ele si muchiile incidente cu acestea: (1,2), (1,3), (2,3), (2,6), (2,7), (6,7)

Numărul de subgrafuri pe care le admite un graf neorientat G cu n noduri se poate determina astfel:

- inițial nu eliminăm nici un nod, deci numărul de subgrafuri va fi C_n^0
- eliminăm pe rând doar câte un singur nod din graful dat, deci vom obține C_n^1 subgrafuri
- eliminăm câte 2 noduri distincte din graf, deci vom obține C_n^2
- ...
- eliminăm cate n-1 noduri distincte din graf deci obținem C_n^{n-1}

Deci în total vom obține:

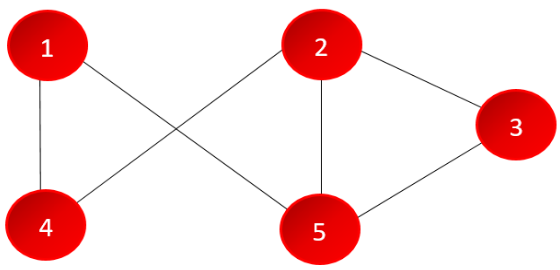
Nrsg = $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$ subgrafuri

Observație! Nu putem elimina toate cele n noduri din graf. Nu există grafuri cu 0 noduri.

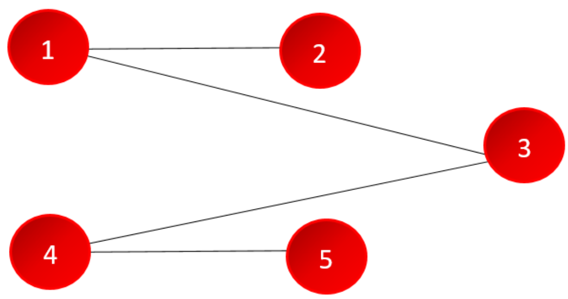
Graf complementar – este graful care are același număr de noduri ca și graful inițial, dar conține muchia (x, y) doar dacă în graful inițial nodurile x și y nu sunt adiacente, oricare ar fi nodurile x, y din graf. Un graf neorientat G admite un singur graf complementar.

Dacă suprapunem graful G și graful complementar grafului G obținem un **graf complet**.

Graful G are
n = 5 noduri și m = 6 muchii



Graful complementar grafului G are
n = 5 noduri și m = 4 muchii



Graf complet - un graf în care există o muchie între oricare două noduri din acel graf.

- într-un graf complet gradul fiecărui nod, va fi maxim și va fi egal cu n-1.

- matricea de adiacență are n(n-1) valori de 1, toate elementele din matrice vor avea valoarea 1, excepție vor face elementele de pe diagonala principală care vor avea valoarea 0.

- Numărul de muchii dintr-un graf complet este egal cu

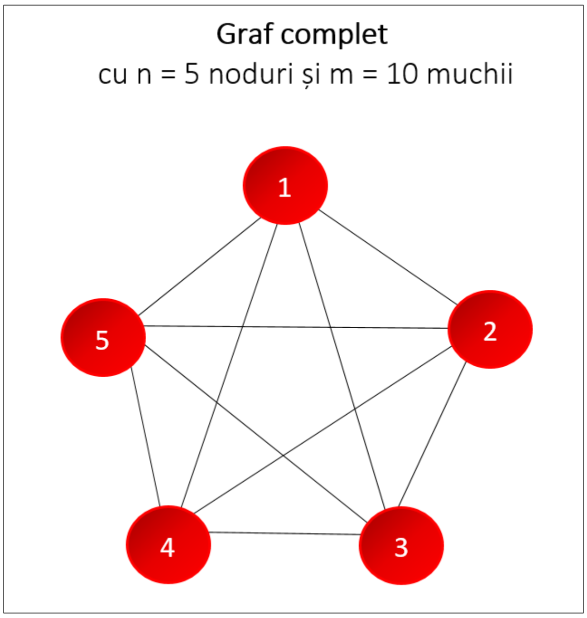
$$m=\frac{n*(n-1)}{2}$$

- Un graf complet este un graf conex.

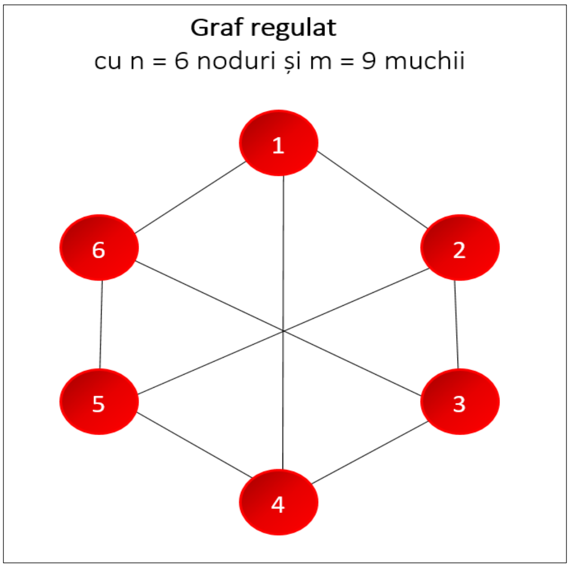
- Orice graf complet cu număr impar de noduri este și graf eulerian.

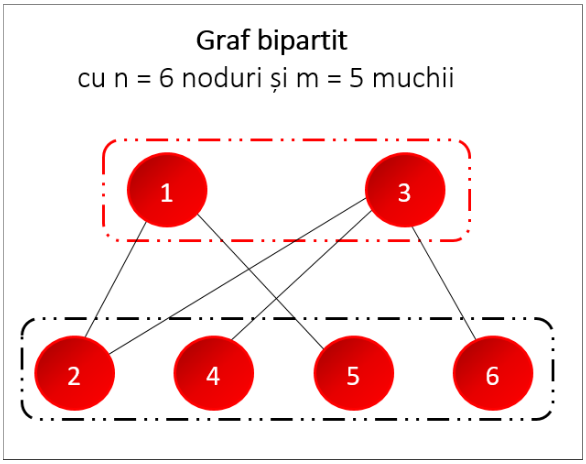
- Orice graf complet cu număr par de noduri nu este graf eulerian.

- Orice graf complet este și graf hamiltonian.



Graf regulat – este un graf in care toate nodurile au același grad. Un graf complet este regulat. Orice graf complet este și graf regulat.

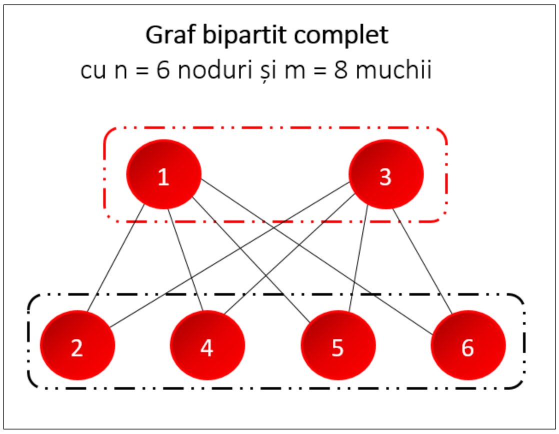




Graf bipartit - este un graf neorientat cu n noduri în care **X** - mulțimea nodurilor poate fi împărțită în două submulțimi disjuncte A și B (reuniunea lor este mulțimea nodurilor grafului, iar intersecția lor este mulțimea vidă), astfel încât între oricare nod care aparține aceleiași submulțimi nu există muchie.

Graf bipartit complet – este un graf bipartit în care oricare nod al submulțimii A se leagă cu toate nodurile din submulțimea B.

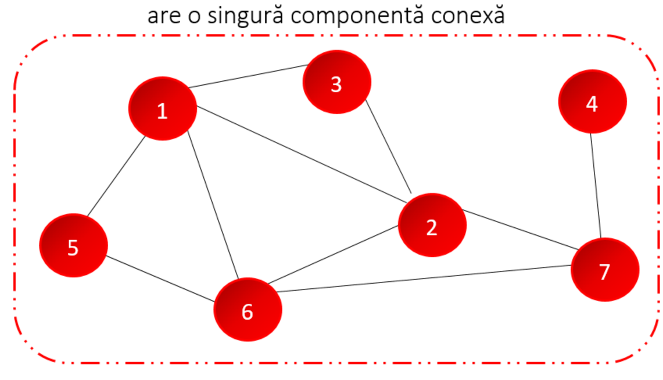
Un graf cu cel puțin două noduri este **bipartit** dacă și numai dacă **nu conține cicluri de lungime impară**.



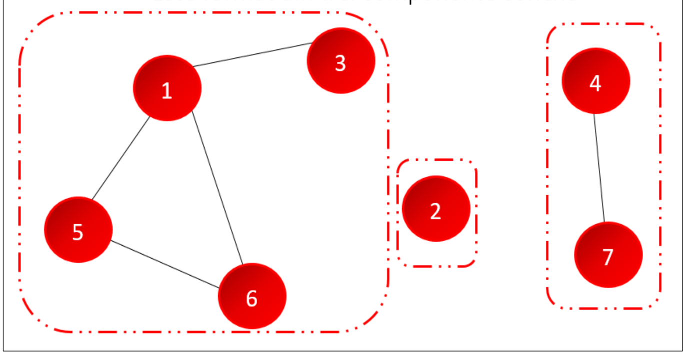
Graf conex – este un graf neorientat în care există un lanț între oricare două noduri distincte din graf. Un graf neorientat cu un singur nod este graf conex.

Componentă conexă – a unui graf neorientat este un subgraf conex, maximal cu această proprietate(dacă am mai adăuga un nod nu ar mai fi respectată).
Un graf neorientat este conex dacă are **o singură componentă conexă**.

Graful conex
are o singură componentă conexă



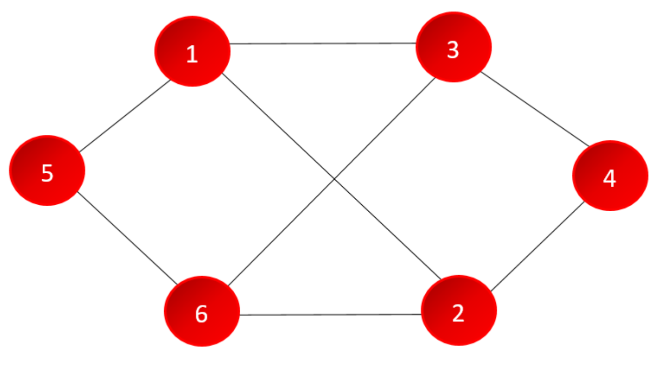
Graful neconex
Este format din trei componente conexe



Graf neconex - Un graf neorientat format din mai multe mai multe componente conexe.

Graf Hamiltonian – este un graf neorientat care admite un ciclu hamiltonian(ciclu hamiltonian – circuit elementar care trece prin toate nodurile grafului o singură dată și la care noul de plecare coincide cu nodul de sosire).

Graf Hamiltonian



Cicluri Hamiltoniene:
5 1 3 4 2 6 1
5 1 2 4 3 6 5
5 6 3 4 2 1 5
5 6 2 4 3 1 5

Teorema lui Dirac: Fie G un graf neorientat cu n noduri si m muchii. Acest graf este **Eulerian** dacă și numai dacă:

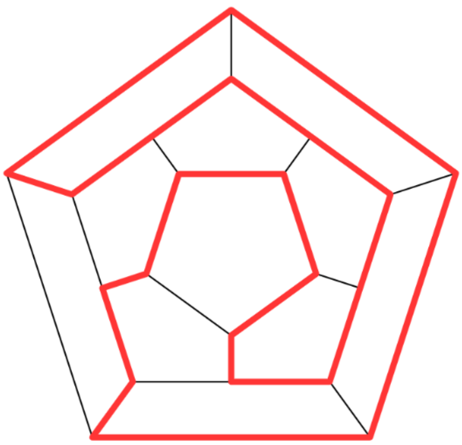
- graful este conex
- gradul fiecărui nod este par.

Consecințe:

- Un graf complet cu număr impar de noduri este graf **Eulerian** și **Hamiltonian**
- Un graf complet cu un număr par de noduri este graf **Eulerian**, dar **NU** este graf **Hamiltonian**. Se observă ușor că fiecare nod va avea gradul impar
- Pentru a transforma un graf complet cu număr par de noduri astfel încât să devină graf Eulerian trebuie eliminate **minim n/2 muchii**.
-

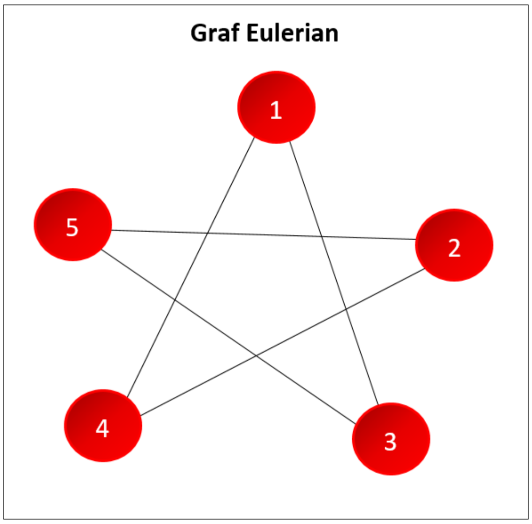
Teorema lui Dirac generalizată: Fie G un graf cu un număr de noduri n ≥ 3. Dacă **grad(x) + grad(y) ≥ n** pentru toate perechile de noduri neadiacente x, y, atunci G este **graf Hamiltonian**.

Exemplu de ciclu Hamiltonian:



Graf Eulerian - este un graf neorientat care admite un ciclu eulerian(ciclu eulerian – ciclu care conține toate muchiile unui graf).

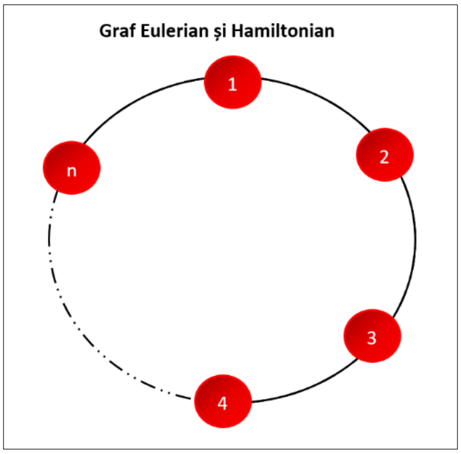
Ciclu Eulerian : 1 3 5 2 4 1

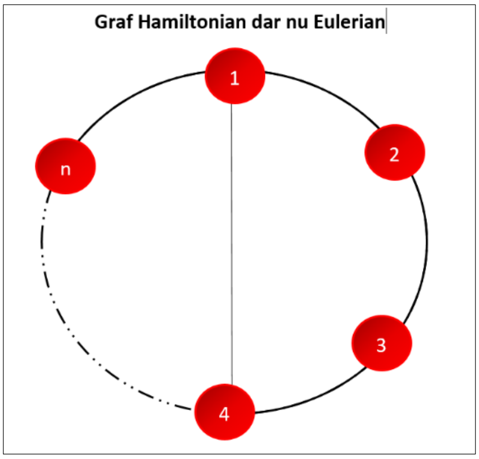


Exemple de grafuri Euleriene si Hamiltoniene

Graf Hamiltonian și Eulerian – orice poligon, indiferent de numărul de noduri.

Graf Hamiltonian dar **nu Eulerian** – orice poligon, indiferent de numărul de noduri, dar cu cel puțin o diagonală.

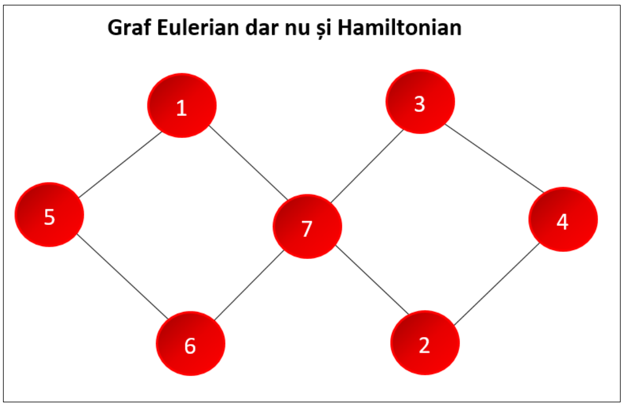




Graf Eulerian dar **nu și Hamiltonian** – un graf care are o formă de papion(cu un punct de intersecție).

Ciclu Eulerian: 1 7 2 4 3 7 6 5 1

Graf care **nu este nici Hamiltonian si nici Eulerian** – este un graf neorientat care conține cel puțin un ciclu neelementar si are grade impare.



Recapitulare formule necesare:

- Numărul de grafuri neorientate, distincte, cu n noduri este $2^{\frac{n*(n-1)}{2}}$.
- Numărul ciclurilor Hamiltoniene dintr-un graf neorientat, complet, este $\frac{(n-1)!}{2}$.
- Numărul de grafuri parțiale distincte ale unui graf neorientat cu m muchii este : 2^m
- Numărul de subgrafuri distincte ale unui graf neorientat cu n noduri este 2^{n-1}